ملحق (1)

مسائل وردت في دورات إمتحانية 2003-2007

المسألة (1) : لتكن لدينا معادلة فريدهولم التكاملية :

$$g(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) g(t) dt \qquad (1)$$

وبفرض أنّ التابع الحالّ $R(x,t,\lambda)$ يحقق المعادلة التكاملية :

$$R(x,t,\lambda) = K(x,t) + \lambda \int_a^b K(t_1,t) R(x,t_1,\lambda) dt_1 \qquad (2)$$

والمطلوب :´1)أثبت أنّ كل حل للمعادلة التكاملية (1) يمكن التعبير عنه بالعلاقة :

$$g(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,t,\lambda) f(t) dt$$

2) أوجد التابع الحالّ $R(x,t,\lambda)$في حالة :

$$\lambda \neq \pm 2 \; , a = 0 \; , b = 1 \; K(x,t) = x - 1 \; , f(x) = x ,$$

ثمّ استنتج حل المعادلة التكاميلة (1) في هذه الحالة .

المسألة (2) : بفرض أن $g_1(x), g_2(x)$ تابعان مستمران ومعرفان عندما $x \geq 0$. والمطلوب :

´1) عرّف ملفوف هذين التابعين وليكن $g_3(x)$.

´2) أثبت نظرية اللف التالية :

$$L_1(g_1 * g_2) = L_1(g_1) . L_1(g_2)$$

علماً أنّ L_1 تحويل لابلاس وحيد الجانب .

المسألة (3) : أوجد التابع الحالّ $R(x)$ للمعادلة التكاملية :

$$g(x) = f(x) + \frac{1}{8} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-t|} g(t) dt$$

وذلك باستخدام تحويل لابلاس ثنائي الجانب . ثمّ أوجد حل المعادلة المتجانسة الموافقة .

المسألة (4) : ليكن لدينا التابعي J المعرّف بالتكامل :

محلول

$$J = \int_{x_0}^{x_1} n(y) \sqrt{1 + y'^2} \, dx$$

علماً أنّ $n(y)$ دالة في y فقط . والمطلوب :

1) أوجد التكامل الأول للمعادلة التفاضلية الموافقة لمعادلة أولر ، كي يكون للتابعي J قيمة قصوى .

2) بفرض أنّ $n(y)=1/y$ ، أوجد المنحنيات القصوى التي ترتيبها موجباً $(y>0)$ والموافقة للشروط الحدية : $y(0)=1 \quad , y(1)=2$

المسألة (5) : لتكن لدينا معادلة فريدهولم التكاملية :

$$g(x)=\lambda\int_a^b K(x,t)g(t)dt+f(x)$$

ا) بفرض أنّ λ قيمة خاصة للمعادلة التكاملية المعطاة ولنفرض أنّ $g(x)$ حلاً لها . أثبت أنّ :

$$\int_a^b f(x)\psi(x)dx=0$$

علماً أنّ الدالة $\psi(x)$ هي حل منقول المعادلة المتجانسة الموافقة للمعادلة المعطاة و $f(x)$ دالة معلومة.

ب) بفرض أنّ :

$$K(x,t)=\cos(x+t)\ ,\ \ a=0,b=\pi \quad \text{و} \quad f(x)=\beta\sin x+\gamma$$

علماً أنّ β,γ ثابتان .

والمطلوب :

1) أثبت أنّ للمعادلة التكاملية المعطاة حلاً وحيداً عندما $\lambda\neq\mp\frac{2}{\pi}$ وذلك مهما تكن قيمة الثابتين β,γ . ثمّ أوجد هذا الحل .

2) أثبت أنّ للمعادلة عدداً لانهائياً من الحلول عندما $\lambda=+\frac{2}{\pi}$ وذلك مهما تكن قيمة الثابتين β,γ . ثمّ أوجد هذه الحلول .

3) أثبت أنّه حتى يكون للمعادلة عدد لانهائي من الحلول عندما $\lambda=-\frac{2}{\pi}$ يجب أن يتحقق الشرط :

$$\pi\beta+4\gamma=0$$

ثمّ أوجد هذه الحلول ضمن هذا الشرط .

المسألة (6) : أوجد حل المعادلة التكاملية :

$$g(x) = f(x) + \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t) g(t) dt$$

علماً أنّ :

$$K(x) = \begin{cases} 3e^{x} & , \quad x \le 0 \\ 0 & , \quad x > 0 \end{cases} \quad ; \quad f(x) = e^{-|x|}$$

المسألة (7) : ليكن لدينا التابعي J المعرّف بالتكامل :

$$J = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}{z} dx$$

والمطلوب البحث عن منحن ، من بين جميع المنحنيات الواصلة بين نقطتين مفروضتين (x_0, y_0) ، (x_1, y_1) بحيث يكون للتابعي J قيمة قصوى ، (حيث $z > 0$) .

المسألة (8) : أوجد القيم الخاصة والتوابع الخاصة للمعادلة التكاملية :

$$g(x) = \lambda \int_{0}^{\pi} K(x,t) g(t) dt$$

علماً أنّ :

$$K(x,t) = \begin{cases} \sin x \cos t & , \quad 0 \le x \le t \le \pi \\ \sin t \cos x & , \quad 0 \le t \le x \le \pi \end{cases}$$

المسألة (9) : أوجد جميع الحلول الممكنة للمعادلة التكاملية التالية :

$$g(x) = \lambda \int_{0}^{\pi} \sin(2x+t) g(t) dt + \pi - 2x$$

المسألة (10) : أوجد حل المعادلة التكاملية :

$$\int_{0}^{x} \frac{\varphi(y) dy}{(x-y)^{\frac{1}{2}}} = x$$

المسألة (11): لتكن لدينا المعادلة التكاملية التالية :

$$g(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)g(t)dt \qquad (1)$$

والمطلوب : 1) أثبت أنَّ التابع الحالّ $R(x,t,\lambda)$ يحقق المعادلة التكاملية :

$$R(x,t,\lambda) = K(x,t) + \lambda \int_a^b K(x,t_1)R(t_1,t,\lambda)dt_1 \qquad (2)$$

2) أثبت أنَّ الدالة :

$$g(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,t,\lambda) f(t)dt$$

تحقق المعادلة التكاملية المعطاة (1) .

3) أوجد التابع الحالّ $R(x,t,\lambda)$ في حالة :

$$K(x,t) = \sin x \sin t + \sin 2x \sin 2t \; , f(x) = \sin x$$

$$. \; |\lambda\pi| < 1 \; , a = 0 \; , b = 2\pi$$

ثمَّ استنتج حل المعادلة التكاميلة (1) في هذه الحالة .

4) بفرض أنَّ :

$$a = -\infty , b = +\infty , f(x) = e^{-|x|} \; , \lambda K(x) = \begin{cases} 4e^{x} \; , \; x \le 0 \\ 0 \quad \; , \; x > 0 \end{cases}$$

أوجد حل المعادلة التكاملية المعطاة (1) في هذه الحالة ، ثمَّ أوجد حل المعادلة المتجانسة الموافقة لها .

المسألة (12) : بفرض أن التابع $g(x)$ مستمر في المجال $(-\infty,+\infty)$ وله مشتق في كل نقطة من المرتبة الأولى والتكامل $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sigma x} g(x)dx$ متقارب تقاربا مطلقا عندما $\alpha < \sigma < \beta$ (α, β عددان حقيقيان ثابتان) وبفرض أنَّ :

$$f(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-sx} g(x)dx$$

أثبت أنَّ :

$$g(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{sx} f(x)dx$$

المسألة (13) : ليكن لدينا التابعي J المعرّف بالتكامل :

$$J = \int_{x_0}^{x_1} n(y)\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx$$

علماً أنّ $n(y)$ دالة في y فقط . والمطلوب :

1) أوجد المعادلات التفاضلية الموافقة ،كي يكون للتابعي J قيمة قصوى .

2) بفرض أنّ $n(y)=1/y$ ،ولنفرض أنّ نصف الفراغ في النقاط $y>0$ ،
أوجد المنحنيات القصوى $y(x),z(x)$ للتابعي J والمحققة للشروط الحدية :

$$y(0)=1 \;,\; y(1)=2 \,,\; z(0)=0 \;,\; z(1)=1$$

المسألة (14) : لتكن لدينا معادلة فريدهولم التكاملية :

$$g(x) = f(x) + \lambda\int_a^b K(x,t)g(t)dt \qquad (1)$$

والمطلوب : 1) عرف التابع الحالّ $R(x,t,\lambda)$ ، ثمّ أثبت أنّ التابع الحالّ يحقق المعادله التكاملية :

$$R(x,t,\lambda) = K(x,t) + \lambda\int_a^b K(t_1,t)R(x,t_1,\lambda)dt_1 \qquad (2)$$

2) بفرض أنّ :

$$a=-\tfrac{\pi}{2} \quad , \quad b=+\tfrac{\pi}{2}$$

$$K(x,t)=t\sin x+\cos t \;,\; f(x)=\alpha x+\beta \text{ ،}$$

حيث α,β عددان ثابتان . أوجد حل المعادلة التكاميلة (1) في هذه الحالة . ثمّ استنتج التوابع الخاصة الموافقة للقيم الخاصة لمنقول المعادلة التكاملية المتجانسة .

المسألة (15) : لتكن لدينا المعادلة التكاملية :

$$g(x) = f(x) + \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)g(t)dt$$

والمطلوب : 1) بفرض أنّ $f(x)\,,K(x)$ تابعان مستمران وأنّ التكامل :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |K(x)|dx = A$$

موجود . أثبت أنّ للمعادلة التكاملية المعطاة حلاً محدوداً واحداً على الأكثر إذا حقق الثابت A الشرط $A<1$.

2) بفرض أنَّ :

$$f(x)=e^{-\frac{2}{3}|x|}, K(x)=\frac{1}{3}e^{-|x|}$$

اثبت أنَّ الشرط $A<1$ محقق ، ثمَّ أوجد حل المعادلة التكاملية المعطاة وحل المعادلة المتجانسة الموافقة لها .

المسألة (16) : ليكن لدينا التابعي J المعرّف بالتكامل :

$$J=\int_{x_0}^{x_1} n(y)\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx$$

علما أنَّ $n(y)$ دالة في y فقط . والمطلوب :

1) أوجد المعادلات التفاضلية الموافقة ، كي يكون للتابعي J قيمة قصوى .

2) بفرض أنَّ $n(y)=\frac{1}{y+1}$ ، أوجد المنحنيات القصوى $y(x), z(x)$ للتابعي J التي ترتيبها موجب $(y>0)$ والموافقة للشروط الحدية :

$$y(0)=0 \quad , y(1)=2 \ ; \ z(0)=0 \ , z(1)=1$$

ثمَّ استنتج معادلة المنحني بدلالة x, y, z .

المسألة (17) : أوجد جميع الحلول الممكنة للمعادلة التكاملية التالية :

$$g(x)=\lambda\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(t\sin x+\cos t)g(t)dt+ax+b$$

حيث a,b ثابتان . ثم أوجد التوابع الخاصة الموافقة للقيم الخاصة لمنقول المعادلة التكاملية المتجانسة .

المسألة (18) : أوجد حل المعادلة التكاملية :

$$g(x)=e^{-|x|}+\int_{-\infty}^{\infty}K(x-t)g(t)dt$$

علما أنَّ :

$$K(x)=\begin{cases}\lambda e^{x} & , x\le 0\\ 0 & , x>0\end{cases}$$

وذلك بفرض أنَّ النقطة $1-\lambda$ تقع على يمين المحور التخيلي (أي أنَّ الجزء الحقيقي لـ $1-\lambda$ موجب) .

المسألة (19) : أوجد جميع الحلول الممكنة للمعادلة التكاملية التالية :

$$g(x) = \lambda \int_0^{\pi} \sin(x-2t)g(t)dt + \cos 2x$$

المسألة (20) : أوجد حل المعادلة التكاملية :

$$\int_0^x \frac{\varphi(y)dy}{(x-y)^{\frac{1}{2}}} = x^2 + 2x$$

المسألة (21) : أوجد حل المعادلة التكاملية :

$$g(x) = e^{-|x|} + \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)g(t)dt$$

علماً أنّ :

$$K(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^x & , \quad x \le 0 \\ 0 & , \quad x > 0 \end{cases}$$

المسألة (22) : ليكن لدينا التابعي J المعرّف بالتكامل :

$$J = \int_0^1 \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} dx$$

والمطلوب :

أوجد المنحنيات القصوى للتابعي J التي ترتيبها موجباً $(y > 0)$ والموافقة للشروط الحدية :

$$y(0) = 1 \quad , y(1) = 2$$

المسألة (23) : لتكن لدينا المعادلة التكاملية :

$$g(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)g(t)dt$$

علماً أنّ : $g(x)$ التابع المجهول ، و $K(x,t)$ تابع معلوم ، و a, b, λ ثوابت

والمطلوب :

1) ما نوع المعادلة التكاملية المعطاة .

2) ما هو الشرط الذي يجب أن تحققه النواة $K(x,t)$ ، كي تكون متناظرة .

3) بفرض أنّ $K(x,t)$ نواة متناظرة و $g_1(x), g_2(x)$ تابعين خاصين موافقين لقيمتين خاصتين مختلفتين λ_1, λ_2 على الترتيب ، أثبت أنّ :

$$\int_a^b g_1(x)g_2(x)dx = 0$$

4) بفرض أنّ : $K(x,t) = 2\cos^2(x+t) - 1$ ، $a = 0, b = 2\pi$ ، أوجد حل المعادلة التكاملـــية المعطـــاة في هذه الحالة ، ثمّ استنتج التوابع الخاصة الموافقة للقيم الخاصة ، لمنقول المعادلة التكاملية الموافقة .

المسألة (24) : أثبت أنّ $g(x)$ هو فعلاً حل للمعادلة التكاملية :

$$\int_0^x \frac{H(x,t)}{(x-t)^{1-\alpha}} g(t)dt = f(x) \quad , H(x,x) \neq 0$$

علمـــاً أنّ $0 < \alpha < 1$ و $f(x)$ تابـــع معلوم ومستمر وقابل للاشتقاق و $H(x,t)$ تابع معلوم ومستمر .

المسألة (25) : أوجد حل المعادلة التكاملية :

$$g(x) = e^{-|x|} + \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)g(t)dt$$

علماً أنّ : $K(x) = \frac{1}{2}e^{-2|x|}$ دالة معلومة .

المسألة (26) : ليكن لدينا التابعي J المعرّف بالتكامل :

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx$$

والمطلوب : 1) أوجد الشرط الذي يجب أن يتحقق كي يكون للتابعي J قيمة قصوى .

2) بفـــرض أنّ F لا يحوي x ، أكتب معادلة أولر الموافقة ، ثمّ استنتج التكامل الأول لها .

3) بفـــرض أنّ $F = \sqrt{1 + y^2 y'^2}$ ، أوجـــد المنحنـــي $y(x)$ الذي من أجله يكون للتابعي J قيمة قصوى ، علماً أنّ $y(x)$ يحقق الشروط الحدية :

$$y(0) = 0 \ , \ \ y(1) = \sqrt{2}$$

••••••••••••••••••••••••••••